

# Аппроксимация оптических сигналов вихревыми собственными функциями двукратного финитного преобразования Ханкеля

М.С. Кириленко<sup>а,б</sup>

<sup>а</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

<sup>б</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, ул. Молодогвардейская, 151, Самара, Россия

## Аннотация

Рассмотрен класс двукратных финитных преобразований Ханкеля, позволяющий описывать прохождение вихревого оптического сигнала через двухлинзовую систему с ограниченными радиусами апертур в объектной и спектральной плоскостях. Рассчитаны собственные функции данного преобразования при различных порядках вихря  $m$ . Полученные функции представляют собой ортонормированную систему функций, по которым можно выполнить разложение произвольного ограниченного оптического распределения с хорошей точностью. Выполнена аппроксимация оптических сигналов, не обладающих радиальной симметрией.

**Ключевые слова:** вихревые оптические пучки; собственные функции; финитное преобразование Ханкеля; аппроксимация

## 1. Введение

Современный уровень использования оптического волокна по временным и частотным характеристикам стремится к пределу пропускной способности [1]. Однако требования к увеличению объема мирового трафика постоянно растут. Для обеспечения соответствия сетей связи постоянно растущим требованиям по пропускной способности рассматриваются дополнительные подходы к уплотнению каналов оптического волокна. Одним из таких подходов является модовое мультиплексирование (mode division multiplexing – MDM) [2,3]. Особое преимущество для повышения пропускной способности информационного канала достигается с помощью оптических пучков, обладающих орбитальным угловым моментом и имеющих бесконечное число возможных квантовых состояний [4]. Значительный успех применения такого способа уплотнения каналов был уже продемонстрирован в оптических волокнах [5] и в свободном пространстве [6,7]. Для формирования и анализа вихревых пучков используют дифракционные оптические элементы [8,9], а для ввода их в оптическое волокно применяют линзовые системы [10,11].

Прохождение вихревого лазерного пучка  $m$ -го порядка через сферическую линзу может быть описано с помощью преобразования Ханкеля  $m$ -го порядка. В реальных линзовых системах имеет место пространственное ограничение, и для описания прохождения оптического сигнала используются финитные (пространственно-ограниченные) операторы распространения [12,13]. Из-за пространственного ограничения, как в объектной, так и в спектральной области, в двухлинзовой системе невозможно получить идеальное изображение. Для того чтобы понять, как исказится оптический сигнал, необходимо разложить их по собственным модам линзовой системы. В связи с этим широко используется понятие коммуникационных мод [14,15]. Коммуникационными модами для квадратных апертур и преобразования Френеля являются вытянутые угловые сфероидальные функции [16,17], которые широко изучаются и применяются в оптике [18-21]. Коммуникационными модами для круглых апертур и финитного преобразования Ханкеля являются круговые [22] и обобщенные [23] сфероидальные функции.

В работах [24,25] была продемонстрирована возможность аппроксимации как одномерных, так и двумерных ограниченных сигналов сфероидальными функциями, проходящими через линзовую систему без искажений.

В работе [26] с целью достижения сверхразрешения также были рассмотрены сфероидальные моды и обобщенные сфероидальные функции, однако вместо последних при расчёте были использованы полиномы Цернике. Заметим, что полиномы Цернике имеют явный аналитический вид и часто используются в задачах анализа волнового фронта и адаптивной оптики [27-29]. В отличие от базиса Цернике сфероидальные функции не имеют аналитического представления и вычисляются как собственные функции оператора, связанного с некоторой оптической системой. Разложение по собственным функциям системы позволяет оценить искажение передаваемого сигнала в целом, т.е. оценить качество передачи информации системой.

В данной работе рассмотрено прохождение оптических сигналов через двухлинзовую изображающую систему на основе двойного финитного преобразования Ханкеля  $m$ -го порядка. Выполнен расчет набора собственных функций такой системы, что позволяет анализировать искажение оптического сигнала при передаче на основе аппроксимации по функциям из этого набора. Осуществлена аппроксимация некоторых сигналов с хорошим уровнем точности.

## 2. Краткие теоретические сведения

Рассмотрим оптическую систему, изображённую на рисунке 1. Оптический пучок проходит через апертуру радиуса  $R$  в области  $D_1$ , на фокусном расстоянии от которой расположена линза. Затем в выходной фокальной плоскости линзы

(в спектральной плоскости  $D_2$ ) расположена ещё одна апертура радиуса  $P$ . Выходное изображение пучка рассматривается в выходной фокальной плоскости второй линзы.

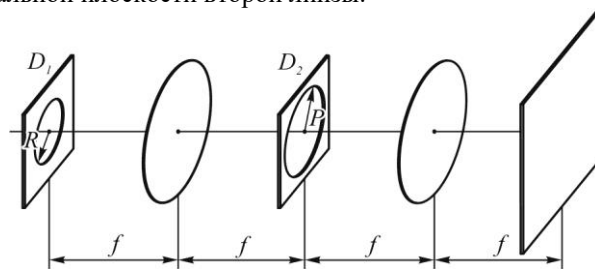


Рис. 1. Схема оптической системы.

Будем рассматривать вихревые пучки, представимые в форме:

$$f(r, \varphi) = f(r) \exp(im\varphi), \quad (1)$$

где  $m$  – целое число, представляющее собой порядок оптического вихря.

Для вихревых пучков (1) прохождение оптического сигнала через двухлинзовую систему, изображённую на рисунке 1, может быть записано следующим образом:

$$H_{R,P} [f(r) \exp(im\varphi)](r', \varphi') = \frac{kP}{2\pi f} \int_0^R L(r, r'; m, P) f(r) r dr \cdot \exp(im\varphi'), \quad (2)$$

$$L(r, r'; m, P) = \int_0^{2\pi} \frac{J_1 \left( \frac{k}{f} P \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr' \cos \varphi} \right)}{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr' \cos \varphi}} \exp(im\varphi) d\varphi, \quad (3)$$

где  $J_1$  – функции Бесселя,  $k$  – волновое число,  $f$  – фокусное расстояние обеих линз. Таким образом, если на входе заданной оптической системы задано вихревое распределение, то и на выходе будет вихревое распределение, при этом порядок вихря  $m$  не меняется.

Собственные функции оператора распространения  $H_{R,P}$  представляют собой ортогональную систему, по которым можно производить разложение оптических сигналов, не обязательно обладающих радиальной симметрией.

### 3. Расчёт собственных функций и аппроксимация

Расчёты будем осуществлять при следующих параметрах:  $k / 2\pi f = 1$ ,  $R = 1$  и  $P = 5$ . В таблицы 1 и 2 занесены изображения некоторых функций и суперпозиций соответственно. Номер  $n$  соответствует номеру собственной функции в порядке убывания модулей собственных чисел.

Таблица 1. Примеры собственных функций

Индексы	Амплитуда	Фаза
$m = 2, n = 1$		
$m = -7, n = 2$		

**Таблица 2.** Примеры суперпозиции собственных функций

Индексы	Амплитуда	Фаза
$m_1 = 2, n_1 = 1$ $+$ $m_2 = -7, n_2 = 2$		
$m_1 = 3, n_1 = 2$ $+$ $m_2 = -3, n_2 = 2$		

Таблица 3 показывает, какие оптические сигналы были аппроксимированы с помощью рассчитанных собственных функций. Также приведены погрешности аппроксимации, выражающие среднеквадратическое отклонение интенсивности оптического пучка от его приближения собственными функциями системы. В разложении участвуют только те функции, у которых собственное значение больше 0,5 и при этом  $|m| \leq 8$ .

**Таблица 3.** Аппроксимация оптических сигналов собственными функциями системы

Название	Амплитуда сигнала	Аппроксимация	Отклонение
«Квадрат»			0,0534
«Рамка»			0,0868
«Треугольник»			0,0982

#### 4. Заключение

Расчёт собственных функций заданной оптической системы представляет собой сложную вычислительную задачу, особенно при больших значениях порядка вихрей  $m$ . Оператор  $H_{R,P}$ , записанный в выражениях (2) и (3) является самосопряжённым, поэтому его собственные функции должны быть действительными, а, следовательно, их фаза должна являться бинарной. Однако погрешности вычислений вносят дополнительные фазовые значения.

Тем не менее, даже при наличии погрешностей осуществление разложения нерадиально-симметричных сигналов по радиально-вихревым собственным функциям оказалось возможным, как и было продемонстрировано в данной работе. При этом отклонения аппроксимированных функций от их оригиналов составили не больше 10%.

Стоит отметить, что для хорошей аппроксимации распределение оптических сигналов в пространственной области  $D_1$  первой апертуры должны быть не больше размеров самой апертуры.

## Литература

- [1] Essiambre, R. Capacity limits of optical fiber networks / R. Essiambre, G. Kramer, P.J. Winzer, G.J. Foschini, B. Goebel // *J. Lightw. Technol.* – 2010. – Vol. 28(4). – P. 662-701. DOI: 10.1109/JLT.2009.2039464.
- [2] Berdague, S. Mode division multiplexing in optical fibers / S. Berdague, P. Facq // *Appl. Optics.* – 1982. – Vol. 21. – P. 1950-1955. DOI: 10.1364/AO.21.001950.
- [3] Khonina, S.N. Optical Vortices in a Fiber: Mode Division Multiplexing and Multimode Self-Imaging / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer // *Recent Progress in Optical Fiber Research*; ed. by Dr. Moh. Yasin. – Rijeka: InTech, 2012. – P. 327-352. DOI: 10.5772/2428.
- [4] Soskin, M.S. Singular optics / M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Progress in Optics.* – 2001. – Vol. 4. – P. 219-276.
- [5] Bozinovic, N. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers / N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A.E. Willner, S. Ramachandran // *Science.* – 2013. – Vol. 340(6140). – P. 1545-1548. DOI: 10.1126/science.1237861.
- [6] Yan, Y. High-capacity millimetre-wave communications with orbital angular momentum multiplexing / Y. Yan, G. Xie, M.P.J. Lavery, H. Huang, N. Ahmed, C. Bao, Y. Ren, Y. Cao, L. Li, Z. Zhao, A.F. Molisch, M. Tur, M.J. Padgett, A.E. Willner // *Nature Communications.* – 2014. – Vol. 5. – P. 4876. DOI: 10.1038/ncomms5876.
- [7] Soifer, V.A. Vortex beams in turbulent media: Review / V.A. Soifer, O. Korotkova, S.N. Khonina, E.A. Shchepakina // *Computer Optics.* – 2016. – Vol. 40(5). – P. 605-624. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-5-605-624.
- [8] Khonina, S.N. Generation of rotating Gauss-Laguerre modes with binary-phase diffractive optics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, M. Honkanen, J. Lautanen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics.* – 1999. – Vol. 46 (2). – P. 227-238. DOI: 10.1080/09500349908231267.
- [9] Khonina, S.N. Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // *Journal of Modern Optics.* – 2004. – Vol. 51(5). – P. 761-773. DOI: 10.1080/09500340408235551.
- [10] Хонина, С.Н. Возбуждение и обнаружение угловых гармоник в волоконном световоде при помощи ДОО / С.Н. Хонина, С.В. Карпеев // *Компьютерная оптика.* – 2004. – Т. 26. – С. 16-26.
- [11] Karpeev, S.V. Experimental excitation and detection of angular harmonics in a step-index optical fiber / S.V. Karpeev, S.N. Khonina // *Optical Memory & Neural Networks (Information Optics).* – 2007. – Vol. 16(4). – P. 295-300. DOI: 10.3103/S1060992X07040133.
- [12] Sneddon, I.N. *The Use of Integral Transforms* / I.N. Sneddon - New York & Boston: McGraw-Hill, 1972. – 539 p.
- [13] Debnath, L. *Integral Transforms and their Applications*, second ed. / L. Debnath, D. Bhatta – Boca Raton, FL: Goo Chapman and Hall/CRC Press, 2007. – 778 p.
- [14] Miller, A.R. Communicating with waves between volumes: evaluating orthogonal spatial channels and limits on coupling strength / A.R. Miller // *Applied Optics.* – 2000. – Vol. 39(11). – P. 1681-1699. DOI: 10.1364/AO.39.001681.
- [15] Martinsson, P. Communication modes in scalar diffraction / P. Martinsson, P. Ma, A. Burval, A.T. Friberg // *Optik.* – 2008. – Vol. 199(3). – P. 103-111. DOI: 10.1016/j.ijleo.2006.07.009.
- [16] Slepian, D. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I / D. Slepian, H.O. Pollak // *Bell System Technical Journal.* – 1961. – Vol. 40(1). – P. 43-63. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1961.tb03976.x.
- [17] Landau, H.J. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – II / H.J. Landau, H.O. Pollak, // *Bell System Technical Journal.* – 1961. – Vol. 40(1). – P. 65-84. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1961.tb03977.x.
- [18] Khonina, S.N. Effect of diffraction on images matched with prolate spheroidal wave functions / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // *Pattern Recognition and Image Analysis.* – 2001. – Vol. 11(3). – P. 521-528.
- [19] Хонина, С.Н. Метод вычисления собственных значений вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, В.А. Соифер // *Доклады Академии наук.* – 2001. – Т. 376, № 1. – С. 30-32.
- [20] Volotovskii, S.G. Analysis and development of the methods for calculating eigenvalues of prolate spheroidal functions of zero order / S.G. Volotovskii, N.L. Kazanskii, S.N. Khonina // *Pattern Recognition and Image Analysis.* – 2001. – Vol. 11(2). – P. 473-475.
- [21] Хонина С.Н. Приближение сфероидальных волновых функций конечными рядами / С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 1999. – Т. 19. – С. 65-70.
- [22] Karoui, A. Spectral analysis of the finite Hankel transform and circular prolate spheroidal wave functions / A. Karoui, T. Moumni // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* – 2009. – Vol. 233. – P. 315-333. DOI: 10.1016/j.cam.2009.07.037.
- [23] Yoshinobu, I. Evaluation of Aberrations Using the Generalized Prolate Spheroidal Wavefunctions / I. Yoshinobu // *Journal of the Optical Society of America.* – 1970. – Vol. 60(1). – P. 10-14. DOI: 10.1364/JOSA.60.000010.
- [24] Kirilenko, M.S. Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system / M.S. Kirilenko, S. N. Khonina // *Proc. SPIE.* – 2014. – Vol. 9156. – P. 91560J. DOI: 10.1117/12.2054214.
- [25] Кириленко М.С. Расчёт собственных функций изображающей двухлинзовой системы в условиях осевой симметрии / М.С. Кириленко, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 2014. – Т. 38, №3. – С. 412-417. DOI: 10.18287/0134-2452-2014-38-3-412-417.
- [26] Pich'e, K. Experimental realization of optical eigenmode super-resolution / K. Pich'e, J. Leach, A.S. Johnson, J.Z. Salvail, M.I. Kolobov, R.W. Boyd // *Optics Express.* – 2012. – Vol. 20(24). – P. 26424-26433. DOI: 10.1364/OE.20.026424.
- [27] Tyson, R.K. *Principles of Adaptive Optics* / R.K. Tyson - Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor and Francis Group, 2010. – 314 p.
- [28] Khonina, S.N. Diffractive optical element matched with Zernike basis / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, Ya. Wang // *Pattern Recognition and Image Analysis.* – 2001. – Vol. 11(2). – P. 442-445.
- [29] Porfirev, A.P. Experimental investigation of multi-order diffractive optical elements matched with two types of Zernike functions / A.P. Porfirev, S.N. Khonina // *Proc. SPIE.* – 2016. – Vol. 9807. – P. 98070E. DOI: 10.1117/12.2231378.